

СИНУСОИДАЛДЫ ТОКТЫҢ БІРФАЗАЛЫ ЭЛЕКТР ТІЗБЕГІ. НЕГІЗГІ ҰҒЫМДАРЫ МЕН ЗАҢДАРЫ

Жоспар

- 6.1 Синусоидалды ток. Негізгі сипаттамалары
- 6.2 Синусоидалды шамалардың көрініс түрлері
- 6.3 Ом және Кирхгоф заңдары комплекстік түрінде

6.1 Синусоидалды ток. Негізгі сипаттамалары

Уақыт бойынша өзгертін шамаларды айнымалы шамалар деп атайды.

ЭТ барлық тармақтарындағы ток пен кернеулер периодты уақыт функциялары болып табылса немесе мәндері өзгермейтін болса, сонда айнымалы шамалар кезіндегі ЭТ жұмыс режимі - қалыптасқан деп аталады. Кері жағдайда тізбектің қалыптаспаған жұмыс режимі деп атайды.

Синусоидалды заң бойынша уақыт бойынша өзгертін функцияны синусоидалды деп атайды. Кез-келген периодты синусоидалды функцияны үш сипаттамамен анықтауға болады: лездік, орташа және әсерлік мәнімен.

Кез-келген уақыт мезетіндегі функцияның мәнін лездік мәні деп атайды, ол үш шамамен анықталады: амплитудамен (функцияның максималды мәні), бұрыштық (циклдық) жиілікпен (бір цикл ішіндегі толық тербелістердің саны) және бастапқы фазамен (координата басына қатысты синусоиданың ығысу шамасы).

Синусоидалды токтың **лездік** мәні:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i), \quad (6.1)$$

мұндағы I_m - амплитуда, $\omega = 2\pi f$ - циклдық жиілік (рад/с), f – жиілік(1/с). Жиілік периодпен байланысты болады: $f = 1/T$. Период - бір толық тербеліске кететін уақыт (с). Синус аргументі, яғни $(\omega t + \psi_i)$ - толық фаза деп аталады, ψ_i - бастапқы фаза. Фаза осы уақыт мезетіндегі тербелістің күйін (сандық мәнін) сипаттайды.

Шамалардың лездік мәні және олардың параметрлері арқылы электр энергия көздерінің жұмысы жайлы немесе элементтерінде түрлендірілген қуаты туралы айтуға болмайды. Олар тізбектің энергетикалық параметрлері жайлы түсінік бермейді. Ол үшін бізге уақытқа тәуелді параметрлер керек.

Тұрақты ток тізбегінде ЭҚК, кернеу мен ток уақыт бойынша тұрақты болғандықтан, ондай шамаларды енгізу қажет болмады.

Бірнеше синусоидалды шамаларды (e , u , i) бірге қарастыру кезінде олардың фаза бұрыштарының айырмашылығын зерттейді. Фаза ығысуының бұрышы – тізбек бөлігіндегі екі синусоидалды шаманың - ток пен кернеудің бастапқы фазаларының айырмашылығы. Фаза ығысуының бұрышы кернеудің бастапқы фазасынан токтың бастапқы фазасын азайтумен анықталынады: $\varphi = \psi_u + \psi_i$. φ бұрышы – алгебралық шамасы болғандықтан, бір синусоидалды шама басқа шаманы фаза бойынша озса немесе қалып қойса, оның мәні оң немесе теріс таңбасымен болуы мүмкін.

Синусоидалды шаманың **орташа** мәні - оң жартылай период ішіндегі модуль бойынша орташа мәніне сәйкес келетін шаманың орташа мәні.

$$I_{\text{опт}} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} i(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} I_m \sin(\omega t) dt = \frac{2I_m}{\pi}, \quad (6.2)$$

яғни синусоидалды токтың орташа мәні $\frac{2}{\pi} = 0.638$ амплитудалық мәнінен құрайды.

Синусоидалды токтың **әсерлік мәні** деп синусоидалды токтың бір периодына тең уақыт мезетінде синусоидалды ток тұрақты ток секілді термодинамикалық немесе жылулық эффект жасайтын токтың мәнін айтамыз:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2(\omega t) dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0.707 \cdot I_m, \quad (6.3)$$

яғни синусоидалды токтың әсерлік мәні 0,707 амплитудалық мәнінен құрайды.

Әсерлік мәні ұғымы айнымалы ток тізбектерінде кең қолданылады. Көптеген өлшеуіш құралдар шкалаларын әсерлік мәнімен бөледі. Электртехникалық қондырғылардың техникалық мәліметтері әсерлік мәнімен беріледі. Әсерлік мәндерін индекстері жоқ үлкен әріптерімен жазады.

6.2 Синусоидалды шамалардың көрініс түрлері

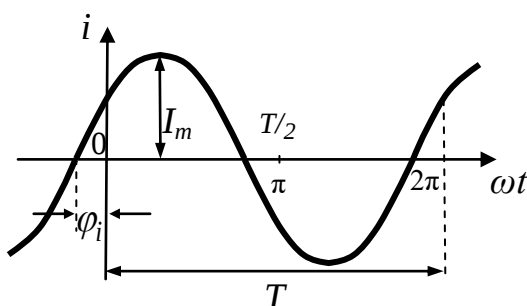
Синусоидалды шамасының бірнеше көрініс түрлері белгілі:

- ✓ Тригонометриялық функциялар арқылы;
- ✓ уақыттық диаграммалар арқылы;
- ✓ айналмалы векторлар арқылы;
- ✓ комплекстік сандар арқылы.

Ең алдымен синусоидалды шаманы *лездік мәні* арқылы жазуға болады: $a = A_m \sin(\omega t + \psi_a)$. Алайда, тізбектің электромагниттік күйін сипаттайтын

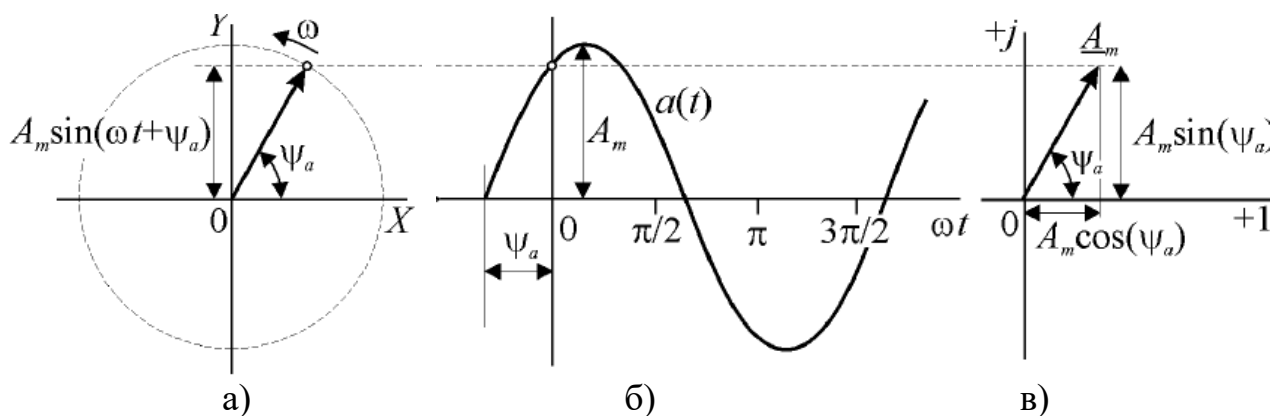
теңдеулер, тіпті қарапайым тізбектер үшін, күрделі түрге ие болады және олардан жалпы түрінде де белгісіз параметрді анықтауға мүмкіндік болмайды. Сондықтан айнымалы ток тізбектерін талдау барысында осы функцияларды уақыттық диаграммалар түрінде көрсетеді (6.1-сурет).

Уақыттық диаграммалар арқылы шамалардың уақыт бойынша сапалы өзгерісін көре аламыз. Алайда, жоғары айтылған тәсілдердің ешқайсысы негізгі шамалардың сандық және фазалық қатынастарының көрініс түрін бермейді. Бұл жағдайда тригонометриялық өрнектерден алгебралық өрнектерге ауысу және синусоидалды шамасының сандық сипаттамаларын бағалауға мүмкіндігін беретін векторлар қолданылады.



6.1-сурет. Токтың уақыттық диаграммасы

Үшінші жағдайда $a = A_m \sin(\omega t + \psi_a)$ уақытқа тәуелді синусоидалды функциясы (6.2, б-сурет) A_m модулі бар векторының OY осіне проекциясына сәйкес келеді. Осы вектор XOY жазықтығында ω тұрақты бұрыштық жылдамдықпен, OX осімен ψ_a бұрышын құрап айналады (6.2, а-сурет). Егер осы тәсілмен жазықтықта әртүрлі синусоидалды функцияларға сәйкес келетін, бірдей жиілігі бар, бірнеше векторды бейнелей алсақ, олар тек бастапқы фазалары арқылы анықталатын өзара орналасуын өзгертпей бірге айналады. Сондықтан, тізбектердің функциялары бірдей жиіліктерге ие болса, олардың талдауы тек амплитуда мен бастапқы фазасымен ғана шектеледі. Бұл жағдайда синусоидалды функцияны сипаттайтын векторлар қозғалыссыз қалады (6.2, в-сурет).



6.2-сурет. Айналмалы векторлар

Бірдей жиілікті әртүрлі синусоидалды өзгеретін шамалардың жиынтығын *айналмалы векторлар* көмегімен бір графикте бейнелеуге болады. Тригонометриялық функцияларға қарағанда векторларды қосу мен азайту анағұрлым оңай болғандықтан, бұл әдіс кең қолданыста.

Төртінші жағдайды қарастырайық. Векторлармен геометриялық амалдарды комплекстік сандары бар алгебралық амалдармен алмастырса болады. Ол алынған нәтиженің нақты болуын қамтамасыз етеді.

Жазықтықтағы кез-келген векторды екі координатаның жиынтығымен: *декарт координат жүйесінің өсіндегі екі проекция* немесе *поляры координат жүйесіндегі модуль түрінде (ұзындық) және санақ басы ретінде алынған өсімен бұрыш (аргумент)* арқылы бейнелеуге болады. Екі координатаны да екі жағдайда комплекстік сан түрінде біріктіруге болады немесе комплекстік сан жазықтығында синусоидалды функцияны бейнелейтін векторды тұрғызуға болады.

Комплекстік сандарды жазу үшін ***алгебралық, тригонометриялық және көрсеткіштік*** формалары қолданылады. Әдетте комплекстік шамаларды «нүктемен» жоғарғы жағынан немесе астын сызып белгілейді.

Алгебралық жазу формасы. Комплекстік жазықтықтағы кез-келген нүкте немесе координаттар басынан осы нүктеге дейін жүргізілген вектор мына комплекстік санға сәйкес келеді:

$$\dot{A}_m = p + jq, \quad (6.4)$$

мұндағы p – нақты сандар өсі бойынша, ал q – жорамал сандар өсі бойынша вектордың координатасы.

Тригонометриялық жазу формасы. Вектордың нақты мен жорамал бөліктерін оның ұзындығы мен нақты сандар өсімен бұрыш ретінде қарастырғанда мына комплекстік сан сәйкес келеді

$$\dot{A}_m = A_m \cos \psi_a + j A_m \sin \psi_a. \quad (6.5)$$

Көрсеткіштік жазу формасы. $e^{j\psi_a} = \cos \psi_a + j \sin \psi_a$ Эйлер формуласын қолдана отырып тригонометриялық түрінен мына комплекстік санға ауысуға болады:

$$\dot{A}_m = A_m (\cos \psi_a + j \sin \psi_a) = A_m e^{j\psi_a}. \quad (6.6)$$

Осында синусоидалды функцияның амплитудасы - комплекстік санның модуліне, ал бастапқы фазасы – аргументіне сәйкес болады.

Есептеу барысында комплекстік сандардың алгебралық және көрсеткіштік жазу формалары қолданылады: біріншісі – қосу, ал екіншісі - көбейту, бөлу және дәрежеге шығару амалдары үшін. Алгебралық формасынан көрсеткіштік формасына ауысу:

$$A_m = \sqrt{p^2 + q^2}, \quad (6.7)$$

$$\psi_a = \arctg\left(\frac{q}{p}\right). \quad (6.8)$$

$e^{j\psi} = \cos\psi + j\sin\psi$ түріндегі көбейткішті *бұрылу операторы* деп атайды. Ол нақты оське қатысты ψ бұрышқа бұрылған бірлік векторы болады. Оператордың атауы - оған кез-келген векторды көбейткенде олардың ψ бұрышына айналуына байланысты қойылған. Нақты және жорамал сандарды $1, j, -1, -j$ бұрылыс операторлар ретінде қабылдауға болады

$$\begin{cases} 1 = e^{j0}; \\ j = e^{j\frac{\pi}{2}}; \\ -1 = e^{j\pi}; \\ -j = e^{-j\frac{\pi}{2}}. \end{cases} \quad (6.9)$$

Модулі синусоидалды функцияның амплитудасына тең болатын $\dot{A}_m$ комплекстік санын - *комплекстік амплитуда* деп атаймыз. Функцияның амплитудасы мен әсерлік мәні өзара константамен байланысты: $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$.

Сондықтан комплекстік санды $\dot{A} = \frac{\dot{A}_m}{\sqrt{2}}$ модулімен сәйкес қолдансақ, есептеуді бірден әсерлік мәндері үшін жасауға болады. $\dot{A}$ санын *комплекстік әсерлік мәні* немесе жай ғана *комплекстік мәні* деп атаймыз.

6.3 Ом және Кирхгоф заңдары комплекстік түрінде

Тізбектің әртүрлі бөліктері үшін Ом заңы

а) Кедергісі R резистивті элементі бар тізбектің бөлігін қарастырамыз. Осы тізбек бойымен синусоидалды ток өтеді

$$i_R = I_{mR} \sin(\omega t + \psi_{i_R}).$$

Ом заңы бойынша $i_R = \frac{u_R}{R}$, сонда элементтегі кернеу түсуі

$$u_R = I_{mR} R \sin(\omega t + \psi_{i_R}).$$

Яғни, синусоидалды ток кезіндегі резистивті элементтегі кернеу де синусоидалды заң бойынша өзгереді. Осы тендеуді $u_R = U_{mR} R \sin(\omega t + \psi_{u_R})$ тендеумен салыстырамыз, сонда амплитудалар мәндерінің байланысы

$$U_{mR} = I_{mR} R$$

және бастапқы фазалардың қатынасы

$$\psi_{u_R} = \psi_{i_R} . \quad (6.10)$$

Осыдан айнымалы ток кезінде резистивті элементі бар тізбек бөлігінде **ток пен кернеу арасында фаза ығысуы болмайды** деген қорытынды жасай аламыз.

Ток пен кернеуді комплекстік түрінде жазамыз:

$$\dot{U}_R = U_{mR} e^{j\psi_{u_R}} ,$$

$$\dot{I}_R = I_{mR} e^{j\psi_{i_R}} ,$$

Онда тізбек бөлігі үшін *комплекстік түріндегі Ом заңы*:

$$\dot{U}_R = \dot{I}_R \cdot R. \quad (6.11)$$

Бұл теңдеу *резистивті элементтегі кернеу түсуін* анықтайды.

б) Энергия көзі ретінде қолданылатын C сыйымдылығы бар сыйымдылықты элементті бар тізбектің бөлігін қарастырамыз. Сыйымдылықтың кернеуі келесі заңдылық бойынша өзгереді:

$$u_C = U_{mC} \sin(\omega t + \psi_{u_C}).$$

Сыйымдылықты элемент арқылы өтетін ток $i_C = \frac{dq}{dt}$, мұндағы $q = u_C C$.

Онда

$$i_C = U_{mC} \omega C \cos(\omega t + \psi_{u_C}).$$

Синусоидалды кернеу кезінде сыйымдылықты элемент арқылы өтетін ток та синусоидалды заңдылық бойынша өзгереді. Егер синус функциясы арқылы түрлендірсек, онда

$$i_C = U_{mC} \omega C \sin(\omega t + \psi_{u_C} + \frac{\pi}{2})$$

аламыз. Осы теңдеуді $i_C = I_{mC} \sin(\omega t + \psi_{i_C})$ теңдеумен салыстырғанда, бастапқы фазалардың қатынасын аламыз

$$\psi_{i_C} = \psi_{u_C} + \frac{\pi}{2} \quad (6.12)$$

және амплитудалар мәндерінің байланысын

$$I_{mC} = U_{mC} \omega C,$$

мұндағы $X_C = \frac{1}{\omega C}$ - сыйымдылықты кедергі.

Осыдан, *айнымалы ток кезінде сыйымдылықты элементі бар тізбек бөлігінде ток пен кернеу арасында фаза ығысуы болады. Сыйымдылықты элементтегі кернеу фаза бойынша токтан $\frac{\pi}{2}$ бұрышқа артқа қалып отырады.*

Барлық шамаларды комплекстік түрінде жазамыз:

$$\dot{U}_C = U_{mC} e^{j\psi_{u_C}},$$

$$\dot{I}_C = I_{mC} e^{j\psi_{i_C}},$$

$$\dot{X}_C = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C} = -jX_C. \quad (6.13)$$

Онда тізбектің бөлігі үшін *комплекстік түріндегі Ом заңы*:

$$\dot{U}_C = \dot{I}_C \cdot \dot{X}_C = -jX_C \cdot \dot{I}_C. \quad (6.14)$$

Бұл теңдеу *сыйымдылықты элементтегі кернеу түсуін* анықтайды.

в) Индуктивтілігі L индуктивті элементі бар тізбектің бөлігін қарастырамыз. Осы тізбек бойымен синусоидалды ток өтеді

$$i_L = I_{mL} \sin(\omega t + \psi_{i_L}).$$

Элементтегі кернеу:

$$u_L = -e_L,$$

мұндағы $e_L = -L \frac{di_L}{dt}$ - ЭҚК өздік индукциясы. Сонда

$$u_L = I_{mL} \omega L \cos(\omega t + \psi_{i_L}).$$

Яғни синусоидалды ток кезінде индуктивті элементтегі кернеу де синусоидалды заң бойынша өзгереді. Егер синус функциясы бойынша түрлендірсек, онда

$$u_L = I_{mL} \omega L \sin(\omega t + \psi_{i_L} + \frac{\pi}{2}).$$

Осы теңдеуді $u_L = U_{mL} \sin(\omega t + \psi_{u_L})$ теңдеумен салыстырғанда, бастапқы фазалардың қатынасын аламыз

$$\psi_{u_L} = \psi_{i_L} + \frac{\pi}{2} \quad (6.15)$$

және амплитудалар мәндерінің байланысын

$$U_{mL} = I_{mL} \omega L,$$

мұндағы $X_L = \omega L$ - индуктивті кедергі.

Осыдан айнымалы ток кезінде индуктивті элементі бар тізбектің бөлігінде ток пен кернеу арасында фаза ығысуы болады. **Индуктивті элементте кернеу фаза бойынша токтан $\frac{\pi}{2}$ бұрышқа озып отырады.**

Барлық шамаларды комплекстік түрінде жазайық:

$$\dot{U}_L = U_{mL} e^{j\psi_{u_L}},$$

$$\dot{I}_L = I_{mL} e^{j\psi_{i_L}},$$

$$\dot{X}_L = j\omega L = jX_L. \quad (6.16)$$

Онда тізбек бөлігі үшін комплекстік түріндегі Ом заңы:

$$\dot{U}_L = \dot{I}_L \cdot \dot{X}_L = jX_L \cdot \dot{I}_L. \quad (6.17)$$

Бұл теңдеу **индуктивті элементтегі кернеу түсуін** анықтайды.

Кирхгоф заңдары

Кирхгоф заңдарының мағынасы шамалардың (ток, кернеу, ЭҚК) уақытқа тәуелділігіне (тұрақты немесе айнымалы) байланысты болмайды. Тек қана айнымалы шамалар комплекстік түрінде алынады.

Кирхгофтың I заңы:

Түйінде жинақталатын барлық комплекстік токтардың алгебралық қосындысы нөлге тең:

$$\sum_k \dot{I}_k = 0. \quad (6.18)$$

Кирхгофтың II заңы :

Тізбектің тұйықталған бөлігінде (контурда) барлық элементтердің комплекстік кернеу түсуінің алгебралық қосындысы осы тізбек бөлігіндегі (контурда) барлық комплекстік ЭҚК алгебралық қосындысына тең:

$$\sum_k \dot{U}_k = \sum_m \dot{E}_m . \quad (6.19)$$

Бақылау сұрақтары

1. Синусоидалды токтың негізгі сипаттамаларын айтып беріңіз.
2. Синусоидалды шамалардың көрініс түрлерін сипаттап беріңіз.
3. Индуктивті элементі бар тізбектің бөлігі үшін Ом заңын комплекстік түрде жазып беріңіз.
4. Активті кедергісі бар тізбектің бөлігі үшін Ом заңын комплекстік түрде жазып беріңіз.
5. Сыйымдылықты элементі бар тізбектің бөлігі үшін Ом заңын комплекстік түрде жазып беріңіз.
6. Кирхгоф заңдарын комплекстік түрінде жазып беріңіз.